<u>Info</u> : Examen blanc : 13 novembre 10h15 – 12h00 en CO1

→ Plan de salle arrivera sur moodle

Exercice à rendre | ⚠ Mercredi 29 oct. 5TCC n dispo pas

<u>R</u> : Une série est une suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (terme général). La série converge si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ existe. La série converge absolument si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ existe.

Critères : Conv | conv abs

vitesse de conv. poly

Séries alternées

$a_k \cdot a_{k+1} < 0$

$|a_{k+1}| < |a_k|$

$\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$

$\Downarrow$

conv

$\sum (-1)^k \dots$

d'Alembert

$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \ell$

Cauchy / limsup

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell$

- $\ell < 1 \Rightarrow$ conv. abs
- $\ell > 1 \Rightarrow$ div.
- $\ell = 1$ $\sum (\quad)^k$

$\sum \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^k$

Cor crit. de comp

α tq $\lim_{k\to\infty} k^{\alpha} a_k = \ell \in \mathbb{R}$

- $\alpha > 1 \Rightarrow$ conv. abs
- $\alpha \leq 1$ & $\ell \neq 0 \Rightarrow$ div.

$\sum \frac{p(k)}{q(k)}$ $\quad$ $\sum \frac{1}{k^{\alpha}}$

Exemples 3.52 (ii) Soit la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5+2n^3+4n}}$$

alt | d'Alembert Cauchy | cor crit comp

$a_k \geq 0$ | $\ell = 1$ | ✓

$\to a_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}, \; n^{-3/2}$

RdP

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^5+2n^3+4n}} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{5/2}\sqrt{1+2\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}}} = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{\underbrace{\sqrt{1+2\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}}}_{\to 1}}$$

α il est là!

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$

Soit $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. On a $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to\infty} n^{3/2} \frac{n+1}{\sqrt{n^5+2n^3+4n}} = 1 \neq 0$

Ainsi, par le corollaire du critère de comparaison, la série conv. abs. et donc converge.

(iii) Soit la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ Alt ✓ d'Alemb Cauchy ✓ car crit de comp. ✓

d'Alembert vs limsup / Cauchy

$k!$

$$\begin{pmatrix} n & & n \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}^n \longleftarrow a_k = b_k^{c_k}$$

d'Alembert : $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^k}{k!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!}$

$\displaystyle = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ converge

abs $\Rightarrow$ converge.

(iv) Soit la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ Alt Cauchy Conduit
d'Alemb. comp.

$a_k \geq 0 \ \forall k$

$\otimes$

d'Alemb ✓ Cauchy ~

Cauchy:

$$\lim_{k\to\infty} \left(|a_k|\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2\cdot\frac{1}{k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{(-1)}{k}\right)^{k} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$\Rightarrow$ Série converge.

(v) La série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Alt — Cauchy d'Alemb — cor crit comp.

✓ — $\otimes$ — $\otimes$

$\hookrightarrow \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$(\ldots)^n$

Mercredi : STCC pas dispo → cours remplacé par une vidéo

$\triangleright \quad a_{k+1} \cdot a_k = \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2k+3}}{k^2+k} = \underbrace{(-1)}_{<0} \cdot \underbrace{\frac{1}{k^2+k}}_{>0} < 0$

$\triangleright \quad |a_{k+1}| = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} = |a_k|$

$\triangleright \lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$

(vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{1+k^3} \frac{2^k}{1+2^k}$

$\underbrace{\frac{2^k}{1+2^k}}_{\to 1}$

Alt $a_k \geq 0$ $\times$

Cauchy d'Alemb   50 %

Cor crit. comp.   50 %

d'Alembert: $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{1+(k+1)^3}\,\frac{2^{k+1}}{1+2^{k+1}}}{\frac{k}{1+k^3}\,\frac{2^k}{1+2^k}}$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \frac{1+k^3}{1+(k+1)^3} \frac{2^{k+1}}{2^k} \frac{1+2^k}{1+2^{k+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{1+1/k}{1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{k^3}+1}{\frac{1}{k^3}+\left(1+\frac{1}{k}\right)^3}}_{\to 1} \cdot \underbrace{2}_{=2} \cdot \underbrace{\frac{2^k}{2^{k+1}}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{2^k}+1}{\frac{1}{2^{k+1}}+1}}_{\to 1} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

Cor crit comp:

$$\frac{k}{1+k^3}\,\frac{2^k}{1+2^k} = \frac{1}{k^2}\,\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{k^3}+1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2^k}+1}}_{\longrightarrow\, 1}$$

$\alpha = 2$ $\;(\;\ldots\;)\;$ $\Rightarrow$ la série conv.

à la place

$$\sum \frac{k}{1+k^3}\cdot 2^k \xrightarrow{\text{d'Alembert}} \text{diverge } (\ell = 2)$$

$$\sum \frac{k}{1+k^3}\cdot\frac{1}{1+2^k} \xrightarrow{\text{d'Alembert}} \text{converge } \left(\ell = \frac{1}{2}\right)$$

Exemple 3.53 Séries qui dépendent d'un paramètre.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r^k \qquad (r \in \mathbb{R}) \leftarrow \text{paramètre}$$

Cauchy : $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|r^k|} = |r| \Rightarrow$ $|r|<1$ la série converge

$|r|>1$ la série diverge.

$r=-1$ et $r=1$?

$\boxed{r=-1}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k$ diverge car $(-1)^k \not\to 0$

$\boxed{r=1}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} 1^k$ diverge car $1^k \not\to 0$

$\sum_{k=1}^{+\infty} r^k$ converge $\Leftrightarrow r \in]-1,1[$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

$S_0 = 1,\quad S_1 = 0,\quad S_2 = 1,\quad S_3 = 0,\quad S_4 = 1,\quad S_5 = 0, \dots$

(i) Soit la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\quad x \in \mathbb{R}$ paramètre.

d'Alembert : $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$

< 1

$0 < 1$ quelque soit x $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

On définit $\displaystyle e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\quad\displaystyle\left(= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \right)$

(ii) Soit la série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (t-1)^k$ $t \in \mathbb{R}$ paramètre

Cauchy : $\lim_{k \to \infty} \left(|2^k (t-1)^k| \right)^{1/k} = \lim_{k \to \infty} 2|t-1| = 2|t-1|$

$2|t-1| < 1 \Rightarrow$ la série converge

$\Updownarrow$

$|t-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < t-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$

$2|t-1| > 1 \Rightarrow$ la série diverge

$2|t-1| = 1$?

$\Updownarrow$

$t = \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$

$\boxed{t = \frac{1}{2}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ diverge

$\boxed{t = \frac{3}{2}}$ $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{3}{2} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1$ diverge

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k (t-1)^k$ converge si et seulement si $t \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$

§ 3.7. Suites définies par récurrence

Définition 3.54 (Suite définie par récurrence)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$. Une suite définie par récurrence est une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de la forme

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

, i.e. $x_0 = a$, $x_1 = f(x_0) = f(a)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(a))$ ...

<u>Remarque 3.55</u> : (i) On peut établir des propriétés de $(x_n)_{n\geq 0}$ par récurrence.

(ii) si f a suffisement de propriétés et $(x_n)_{n\geq 0}$ converge.

Alors, $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$, ℓ est solution de $\ell = f(\ell)$

(iii) Généralement, il y a 3 stratégies pour montrer qu'une telle suite converge :

(a) On trouve une formule close $x_n = g(n)$ et on l'étudie comme d'habitude (TRÈS RARE)

(b) On montre que (x_n) est monotone et bornée

~~(c) On montre que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy~~

Exemple 3.56 (suite définie par récurrence, cas affine)
Soient $a, m, h \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + h$ et la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) = m \cdot x_n + h & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$x_0 = a$

$x_1 = f(x_0) = m \cdot x_0 + h = m \cdot a + h$

$x_2 = f(x_1) = m \cdot x_1 + h = m(m \cdot a + h) + h = m^2 \cdot a + mh + h$

$x_3 = f(x_2) = m^3 \cdot a + m^2 h + mh + h = m^3 \cdot a + h\left(1 + m + m^2\right)$

on déduit !

$$x_n = m^n \cdot a + h \sum_{k=0}^{n-1} m^k$$